Examen Électromagnétisme - PEIP 2
23 janvier 2018
4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes collège standards autorisées

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}} \quad , \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9\ \mathrm{F.m^{-1}}.$$

1. (7pts) **Questions courtes (spécifier les unités) :**

   (a) Le champ électrique à proximité d'un point M d'une surface d'un conducteur en équilibre électrostatique est $\vec{\boldsymbol{E}}(M) = 9\pi\,(3\widehat{\boldsymbol{u}}_x + 4\widehat{\boldsymbol{u}}_y)\mathrm{V.m^{-1}}$.

   i. Trouver l'amplitude du champ $\left|\vec{\boldsymbol{E}}(M)\right|$.

$$\left|\vec{\boldsymbol{E}}(M)\right| = 9\pi\sqrt{3^2+4^2} = 45\pi \simeq 141,4\,\mathrm{V.m^{-1}}$$

   ii. Trouver la densité surfacique de charge, $\sigma(M)$ en ce point.
   Le théorème de Coulomb nous dit qu'à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique, le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ à un point M de la surface est normale à, c.-à-d., $\vec{\boldsymbol{E}}(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}$. Donc la module de $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ est :

$$\left|\vec{\boldsymbol{E}}(M)\right| = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \sigma(M) = \epsilon_0\left|\vec{\boldsymbol{E}}(M)\right| = \epsilon_0 45\pi = \frac{45}{4}4\pi\epsilon_0 = \frac{45}{4}\frac{1}{9\times10^9} \simeq \frac{5}{4}10^{-9} = 1,2\ 10^{-9}\ \mathrm{C.m^{-2}}$$

   (b) **Forces de Laplace**

   i. Quand les forces de Laplace se manifestent-elles ?
   Les forces de Laplace se manifestent quand un courant parcours un fil conducteur *solide* en présence d'un champ magnétique.

   ii. Trouver la force de Laplace sur une tige de longueur l parcourue par un courant I et orientée sur l'axe Ox, ($\vec{\boldsymbol{l}} = l\vec{\boldsymbol{u}}_x$), dans un champ magnétique constant $\vec{\boldsymbol{B}} = B_0\left(\vec{\boldsymbol{u}}_x + 2\vec{\boldsymbol{u}}_y + 3\vec{\boldsymbol{u}}_z\right)$ (A.N. $B_0 = 3$T, $l = 20$cm, $I = 2$A).

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}_L &= I\int \vec{d\boldsymbol{l}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = Il\vec{\boldsymbol{u}}_x \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{B}} = IlB_0\vec{\boldsymbol{u}}_x \wedge \left(\vec{\boldsymbol{u}}_x + 2\vec{\boldsymbol{u}}_y + 3\vec{\boldsymbol{u}}_z\right)\\ &= IlB_0\left(2\vec{\boldsymbol{u}}_z - 3\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)\\ &= 2,4\left(2\vec{\boldsymbol{u}}_z - 3\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)\mathrm{N}\end{aligned}$$

   (c) **Champ magnétique et induction :** On considère une bobine cylindrique alignée sur l'axe $\vec{\boldsymbol{u}}_x$, de rayon $R = \frac{10}{\pi}$cm, de longueur, $l = 10$cm, et comportant $N = 1000$ tours. (Formules et applications numériques - démonstrations non nécessaires)

   i. Donner le champ magnétique, $\vec{\boldsymbol{B}}$, à l'intérieur de la bobine quand un courant de $I = \frac{10}{\pi}$A circule dans la bobine (dans l'approximation de la bobine infinie).

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\vec{\boldsymbol{u}}_x$$
$$n = \frac{1000}{10.10^{-2}} = 10^4\mathrm{m^{-1}}$$
$$\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right| = 4\pi.10^{-7}10^4\frac{10}{\pi} = 4.10^{-2}\mathrm{T}$$

   ii. Donner l'auto inductance, L, de la bobine dans l'approximation d'une bobine infinie.

$$L = \mu_0\frac{\pi R^2N^2}{l} = 4\pi.10^{-7}\pi\frac{10^2 10^{-4}10^6}{\pi^2 10^{-1}} = 4.10^{-2}\mathrm{H} = 0,04\mathrm{H}$$

   iii. Donner l'énergie magnétostatique stockée dans la bobine.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}4.10^{-2}\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \simeq 0,2\mathrm{J}$$

2. (4pts) **Champ magnétique et induction**

(a) On considère un cadre carré de côté $a = 10\text{cm}$, de résistance $R = 2\Omega$. Il est placé dans un plan z constant et soumis à un champ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = B_0\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + 2\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + 3\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z\right)\cos(\omega t)$ ($B_0 = 1\text{T}$, $\omega = 100\text{Hz}$).

i. Trouver le flux $\Phi_m(t) = \iint \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$ à travers le cadre.

$$\begin{aligned}\Phi(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{B}} &= B_0\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + 2\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + 3\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z\right)\cos(\omega t) \cdot \iint \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} \\ &= B_0\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + 2\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + 3\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z\right)\cos(\omega t) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z S \\ &= 310^{-2}\cos(\omega t)\,\text{Tm}^2\end{aligned}$$

ii. Trouver la force électromotrice $e(t)$, induit dans le cadre (A.N. sur l'amplitude).

$$\begin{aligned}e(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} = \omega 310^{-2}\sin(\omega t)\,\text{V} \\ &= 3\sin(\omega t)\,\text{V}\end{aligned}$$

iii. Trouver le courant induit $i(t)$, dans le cadre (A.N. sur l'amplitude).

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{3\sin(\omega t)}{2} = 1,5\sin(\omega t)\,\text{A}$$

(b) On considère un potentiel vecteur de $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(x,y) = A_0\ln\left(x^2+y^2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z$. Trouver le champ magnétique, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\textbf{rot}}\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$, associé.

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}0\\0\\A_0\ln\left(x^2+y^2\right)\end{bmatrix} = A_0\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right)\\ -\frac{\partial}{\partial x}A_0\ln\left(x^2+y^2\right)\\ 0\end{bmatrix} = 2A_0\begin{bmatrix}\frac{y}{x^2+y^2}\\ -\frac{x}{x^2+y^2}\\ 0\end{bmatrix} \tag{1}$$

(Ca vous rappelle quel champ magnétique vu en cours ?)
On se rappel que le champ magnétique créé par un fil infini est :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi$$

Si le fil est orienté le long de l'axe Oz, on a :

$$\begin{aligned}\rho &= \left(x^2+y^2\right)^{1/2} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi &= -\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y = \begin{bmatrix}\frac{y}{x^2+y^2}\\ -\frac{x}{x^2+y^2}\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

donc le champ magnétique en coordonnées Cartésiennes est

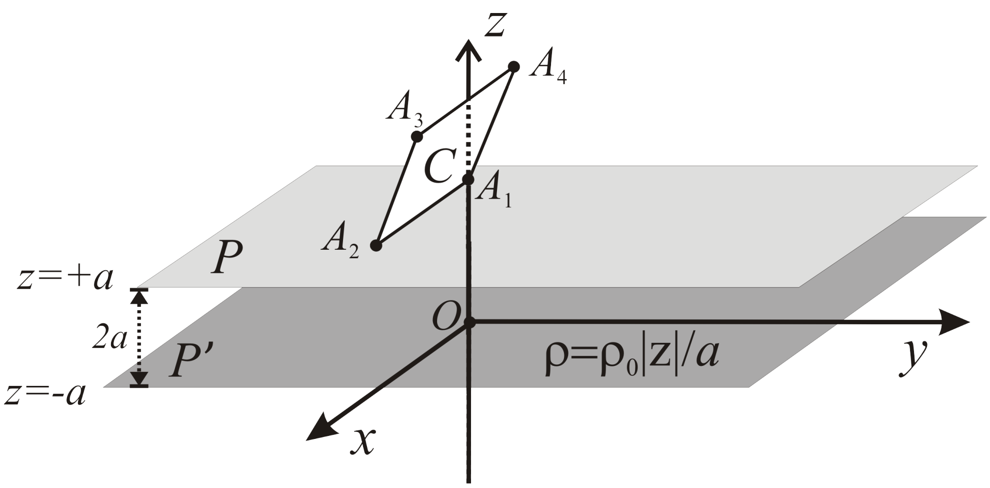
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(x,y,z) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\begin{bmatrix}-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\\ \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\\ 0\end{bmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\begin{bmatrix}-\frac{y}{x^2+y^2}\\ \frac{x}{x^2+y^2}\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2}$$

Par comparaison de l'éqs. (1) et (2), on trouve

$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi} = 2A_0 \Longrightarrow A_0 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

Il s'agit donc d'un champ magnétique créé par un fil électrique orienté dans la direction $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z$ avec I négatif.

3. (5pts) **Électrostatique et Théorème de Gauss**
Soit un repère cartésien orthonormé direct et deux plans infinis (P) et (P') parallèles au plan xOy et ayant comme coordonnées respectives $z = +a$ et $z = -a$. Ces plans délimitent une région de l'espace chargée avec une distribution de charge volumique, $\rho(z) = \frac{|z|}{a}\rho_0$. Il n'y pas de charge surfacique dans ce problème et la densité de charge volumique à l'extérieur des plaques est nulle. (on ignore le cadre C dans ce premier exercice)



(a) Grâce, entres autres, à des considérations de symétrie et d'invariances :

i. Donner une expression générale du champ électrique $\vec{E}$ en un point M quelconque de l'espace (pour cela, on analysera en fonction de quelles varaiables le champ peut varier et on déterminera sa direction).

Par symétrie et invariance, on sait que le champ $\vec{E}(M)$ droit appartenir à chaque plan de symétrie passant par ce point (s'il en existe). Comme tout plan perpendiculaire au plan xOy est plan de symétrie, le champ $\vec{E}$ doit être être porté par le vecteur $\vec{u}_z$.

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} E(z)\,\vec{u}_z & z > 0 \\ -E(z)\,\vec{u}_z & z < 0 \end{cases}$$

Le champ $\vec{E}$ doit être de sens opposé pour $z < 0$ par rapport à $z > 0$, puisque xOy est un axe de symétrie du système.

ii. Expliquer, par arguments appropriés, que le champ électrique est nul en tout point du plan médian xOy et uniforme pour $z > a$ et $z < -a$.

Le plan xOy est un plan de symétrie du système, donc $\vec{E}$ doit être perpendiculaire à ce plan (c.-à-d. $\vec{E} \cdot \vec{u}_z = 0$). Mais $\vec{E}$ doit également être perpendiculaire à tous plans qui sont perpendiculaires au plan xOy. Du coup le produit scalaire de $\vec{E}$ avec chacun des axes $\vec{u}_z$ doit être nul. Autrment dit $(\vec{E} \cdot \vec{u}_x = \vec{E} \cdot \vec{u}_y = \vec{E} \cdot \vec{u}_z = 0)$. Donc $\vec{E} = \vec{0}$ dans le plan xOy.

(b) Grâce au théorème de Gauss, déterminer le champ électrique, $\vec{E}(M)$, en tout point M dans les régions, ($z > a$ et $a > z > 0$,).

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 a} \times \begin{cases} a^2\vec{u}_z & z > a \\ z^2\vec{u}_z & a > z > 0 \\ -z^2\vec{u}_z & a > z > 0 \\ -a^2\vec{u}_z & z < -a \end{cases}$$

Faire une représentation graphique résumant les résultats trouvés.

(c) Exprimer le potentiel électrique du système, $V(z)$, en fixant $V(0) = 0$ dans le plan $z = 0$. Faire une représentation graphique.

Dans la région, $a > z > 0$:

$$\begin{aligned} V(z) - V(0) &= \int_z^0 \vec{\boldsymbol{E}}\,(z)\cdot\vec{d\boldsymbol{l}} = \int_z^0 \frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon_0}\vec{\boldsymbol{u}}_z\cdot\vec{\boldsymbol{u}}_z dz \\ &= \frac{\rho_0}{2a\epsilon_0}\int_z^0 z^2 dz = -\frac{\rho_0 z^3}{6a\epsilon_0} \\ V(z) &= -\frac{\rho_0 z^3}{6a\epsilon_0} \qquad\qquad a > z > 0 \\ \Longrightarrow V(a) &= -\frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} \end{aligned}$$

Dans la région, $z > a$:

$$\begin{aligned} V(z) - V(a) &= \int_z^a \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\vec{\boldsymbol{u}}_z\cdot\vec{\boldsymbol{u}}_z dz = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\int_z^a dz \\ &= \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}(a-z) \\ \Longrightarrow V(z) &= \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}(a-z) + V(a) = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}\left(\frac{a}{3}-\frac{z}{2}\right) \qquad\qquad z > a \\ V(z) &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0 a}\times\begin{cases} a^2\left(\frac{a}{3}-\frac{z}{2}\right) & z > a \\ -\frac{|z|^3}{6} & a > z > -a \\ a^2\left(\frac{a}{3}-\frac{z}{2}\right) & z < -a \end{cases} \end{aligned}$$

4. (5pts) On continue avec le même système que dans l'exercice précédent.

(a) Dans la limite $\frac{a}{z} \to 0$, on peut assimiler la région de l'espace entre $z = -a$ et $z = a$ d'épaisseur $2a$, à une charge surfacique, σ_0 d'épaisseur négligeable. Trouver l'expression de σ_0 (en fonction de ρ_0 et de a).

$$\sigma_0 = \int_{-a}^{a} \frac{|z|}{a}\rho_0 dz = \frac{2}{a}\rho_0\int_0^a z dz = \frac{2}{a}\rho_0\frac{a^2}{2} = a\rho_0$$

(b) Un cadre carré, C, d'arête de longueur $2a$, est placé de façon telle que ses sommets A_1, A_2, A_3, A_4 aient les coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2a + a\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 2a + a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On oriente le cadre dans le sens $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4$.
Trouver le vecteur normal au cadre (dans l'orientation choisie) à partir du produit vectoriel $\vec{\boldsymbol{n}} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3}$. Montrer que le vecteur normal unitaire $\hat{\boldsymbol{n}}$, a pour composantes dans la base $(\vec{\boldsymbol{u}}_x, \vec{\boldsymbol{u}}_y, \vec{\boldsymbol{u}}_z)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2} &= \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3} &= \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3}a^2 \\ 2a^2 \end{pmatrix} \\ \left|\overrightarrow{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3}\right| &= 2a^2\sqrt{3+1} = 4a^2 \end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \frac{\vec{\boldsymbol{n}}}{|\vec{\boldsymbol{n}}|} = \frac{1}{4a^2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3}a^2 \\ 2a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Calculer le flux électrique $\Phi_e \equiv \iint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{d\boldsymbol{S}}$ à travers le cadre (sachant que la surface du cadre est $S = 4a^2$).

$$\begin{aligned} \Phi_e &\equiv \iint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{d\boldsymbol{S}} = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\iint\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} dS = \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0}\iint dS = \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0}S \\ &= \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0}4a^2 = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}a^2 \end{aligned}$$